لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ (إن وجدت)

$$f(x) = x^2 + 2 \quad , \quad f(x+h) = (x+h)^2 + 2$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 2 - (x^2+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 \cancel{+2} \cancel{-x^2} \cancel{-2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} \quad , \quad h \neq 0$$

$$= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x + 0 = 2x$$

$$\therefore f'(x) = 2x$$

لتكن الدالة f: $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & : \quad x<1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x\geqslant 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد إن أمكن $f'(1)$.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$ (إن وجدت.)

$a=1$, $f(a)=f(1)=2\sqrt{1}=2$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}, \quad x\neq1$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\lim_{x\to1^+}(\sqrt{x}+1)=\lim_{x\to1^+}\sqrt{x}+\lim_{x\to1^+}1$$

$1^+>0$

$$=\sqrt{1}+1=1+1=2,\ 2\neq0$$

$$\therefore f'_+(1)=\frac{\lim_{x\to1^+}2}{\lim_{x\to1^+}(\sqrt{x}+1)}=\frac{2}{2}=1$$

$$\therefore f'_+(1)=1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2+1-2}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}, \quad x\neq1$$

$$=\lim_{x\to1^-}(x+1)$$

$$=1+1=2$$

$$\therefore f'_-(1)=2$$

$$\therefore f'_+(1)\neq f'_-(1)$$

$\therefore f'(1)$ غير موجودة